Всероссийская олимпиада школьников

Муниципальный этап

2024-2025 уч. год

7 класс

7.1. Расположите в клетках квадрата 3×3 девять чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по одному в каждой клетке так, чтобы из шести произведений трёх чисел в отдельной строке или в отдельном столбце ровно три произведения были точными квадратами.

7.2. Можно ли разрезать квадраты 5×5 и 4×4 клеток на (общее число) пять частей по линиям клеток так, чтобы из этих пяти частей можно было сложить прямоугольники 3×7 и 10×2 клеток?

7.3. Игроки А и Б по очереди (начинает А) записывают на доске одну из цифр 2, 3, 5 или 7 (цифры могут повторяться). Игра заканчивается, как только произведение всех записанных на доске чисел станет больше 2024. Выигрывает тот игрок, который записал последнюю цифру. Кто выигрывает при правильной игре? (под *правильной* игрой понимаются такие действия игроков, когда каждый действует наилучшим для себя образом, пытаясь выиграть)

7.4. Докажите, что если a, b и c – целые числа, для которых сумма $35a^3 + 17b^3 - c^3$ делится на 18, то произведение abc делится на 6.

7.5. На отрезке [0; 160] числовой прямой отмечены красным цветом точка А и синим цветом точка Б. Затем вместе с точкой А отмечены красным цветом все такие точки отрезка [0; 160] , которые отстоят от точки А на расстояние, кратное числу 5 . Вместе с точкой Б отмечены синим цветом все такие точки отрезка [0; 160], которые отстоят от точки Б на расстояние, кратное числу 8. Если все закрашенные точки попарно различны (нет точек, закрашенных в оба цвета), то всегда ли среди всех закрашенных точек найдутся две такие, расстояние между которыми не больше 1?

Всероссийская олимпиада школьников

Муниципальный этап

2024-2025 уч. год

8 класс

8.1. Бегуны Алёша, Боря и Ваня стартовали одновременно на дистанции 1 км. Когда Алёша финишировал, Боря отставал от него на 100 метров, а Ваня отставал от Бори на 90 метров. Алёша закончил бег на 18 секунд раньше Бори. На сколько секунд позже Бори закончил бег Ваня?

8.2. На доске записаны пятизначное число N и ещё четыре числа: сумма первых двух цифр числа N, сумма первых трёх цифр числа N, сумма первых четырёх цифр числа N и сумма всех пяти цифр числа N. В результате на доске оказались записаны: одна цифра 1, шесть цифр 2, одна цифра 4, три цифры 6 и две цифры 8. Найдите N.

8.3. В параллелограмме ABCD точка M – середина стороны AD, E – точка на отрезке MC. Докажите, что если AE = AB, то угол BEM прямой.

8.4. Квадрат 11 x 11 разрезают по линиям клеток на различные по площади прямоугольники. Какое наибольшее число прямоугольников может получиться?

8.5. Найдите все такие целые положительные числа n, для которых сумма
$S_n = (1^2)! + (2^2)! + (3^2)! + \ldots + (n^2)!$ является квадратом некоторого целого числа. $(k! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k)$

Всероссийская олимпиада школьников

Муниципальный этап

2024-2025 уч. год

9 класс

9.1. Целые положительные числа m, n, k удовлетворяют уравнению

$m^2n^2k^2 + m^2n^2 + n^2k^2 + k^2m^2 + m^2 + n^2 + k^2 = 1969$. Найдите $m + n + k$.

9.2. Квадрат 8×8 разрезали на квадраты 2×2 и прямоугольники 1×4 . При этом общая длина разрезов оказалась равной 54 . Сколько получилось квадратов 2×2 ?

9.3. Найдите все такие тройки (p, q, r) простых чисел, что $4q-1$ простое число и $(p + q)/(p + r) = r - p$.

9.4. PM – медиана треугольника PQT . Окружность с центром O на стороне PT проходит через точки M и T , пересекает медиану PM в её середине и пересекает сторону PT в точке K так, что PK = OK . Докажите, что PQ = PM .

9.5. На доске записаны одинаковые числа: 2024, 2024, …, 2024 – всего 2024 числа. На первом шаге стираются любые два числа x и y и вместо них записывается число $(x+y)/4$. Такая процедура выполняется последовательно 2023 шага, после чего на доске остаётся только одно число z . Докажите, что $z > 1$.

Всероссийская олимпиада школьников
Муниципальный этап
2024-2025 уч. год

10 класс

10.1. Верно ли, что существует не менее 2024 различных натуральных чисел n, для каждого из которых значение выражения $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ является натуральным числом?

10.2. Пусть a и b - положительные числа и $p = 1 + a/b$, $q = 1 + b/a$, $p^2 + q^2 = 15$. Найдите значение выражения $p^4 + q^4$.

10.3. Докажите, что для любого натурального числа n число $k = (18^{4n+2} + 1)/325$ является составным натуральным числом.

10.4. Игроки А и Б играют в следующую игру. Сначала игрок А расставляет в определённом порядке восемь карточек, на которых сверху записаны числа 2, 0, 1, 7, 1, 8, 2, 4 . Затем игроки по очереди, начиная с игрока Б, забирают себе одну их крайних карточек. Выигрывает тот игрок, на карточках которого сумма чисел больше. Кто из игроков выигрывает при правильной игре? (под *правильной* игрой понимаются такие действия игроков, когда каждый действует наилучшим для себя образом, пытаясь выиграть) Опишите выигрышную стратегию этого игрока.

10.5. Диагонали трапеции АВСТ перпендикулярны. Точки К, М , О, Р – середины сторон АВ, ВС, СТ, ТА соответственно. На основании СТ нашлась точка Н, отличная от точки О, для которой угол МНР – прямой. Докажите, что угол ВКН – прямой.

Всероссийская олимпиада школьников

Муниципальный этап

2024-2025 уч. год

11 класс

11.1. Пусть a и b - положительные числа и $p = 1 + a/b$, $q = 1 + b/a$, $p^2 + q^2 = 15$. Найдите значение выражения $p^4 + q^4$.

11.2. Олег сыграл за две недели не более сорока партий в шахматы. Три четвёртых из партий, сыгранных Олегом за первую неделю, он выиграл. А из партий, сыгранных во вторую неделю, Олег не выиграл только 20% партий. Найдите общее количество сыгранных Олегом за две недели партий, если во вторую неделю он выиграл на семь партий больше, чем в первую.

11.3. Найдите наибольшее положительное целое число n, произведение всех делителей которого равно n^2, а сумма всех делителей равна $n + 2017$.

11.4. В клетках квадрата 4x4 расставляются целые положительные числа так, что в каждой клетке ровно одно число, все шестнадцать чисел различны и в любых двух соседних по горизонтали или вертикали клетках (имеющих общую сторону) стоят не взаимно простые числа (имеющие общий делитель, отличный от 1). Найдите наименьшее возможное значение суммы всех шестнадцати чисел.

11.5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC точка M – середина стороны AB, высоты AD и BE пересекаются в точке H. Докажите, что прямые BA, DE и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно прямой MH, пересекаются в одной точке.